08-12-21
Πραγματική

ΘΕΩΡΗΜΑ (Dini)
Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ., $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών πραγματικών συν/εων από τον X, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} f$.

Αν: (i) $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής
(ii) $\{f_n\}$ μονοτονη
$\Big\} \Rightarrow f_n \xrightarrow{o\mu.} f$

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $f_n: X \to \mathbb{R}$, ~~...~~ (X,d) συμπαγής και $f_n \xrightarrow{o\mu.} f$, τότε η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

συνεχείς

ΛΥΣΗ:

f συνεχής (από θεώρημα) $\xrightarrow{X \text{ συμπαγής}}$ f φραγμένη $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|f_n\|_\infty = \|(f_n - f) + f\|_\infty \leq \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\text{φραγμένη}} + \|f\|_\infty \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|f_n\|_\infty \leq M$ και $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists M > 0$, τ.ω. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$ $|f_n(x)| \leq M$

~~Άσκ~~ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ο (X,d) δεν είναι συμπαγής, τότε δεν ισχύει το Θεώρημα του Dini.

Πχ. $X=(0,1)$, $d(x,y)=|x-y|$, $f_n(x)=x^n$, $f(x)\equiv 0$

- $\{f_n\}$ φθίνουσα, διότι $x^n \leq x^{n+1}$, $\forall x\in(0,1)$
- $f_n(x)=x^n \xrightarrow[\text{ΑΠΙ}]{} 0$, $\forall x\in(0,1) \Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f$
- $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \Leftrightarrow \|f_n-f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\|f_n\|_\infty=\sup\limits_{x\in(0,1)} x^n$. Για $x=1-\frac{1}{n}$ έχουμε $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{2e}$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \geq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{2e}$, $\forall n\geq n_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n\|_\infty \not\to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \overset{\text{ομ}}{\not\longrightarrow} f$.

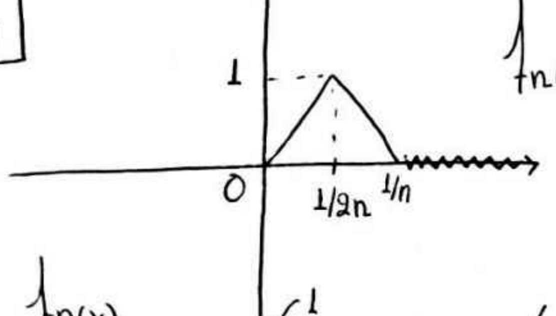
$$\begin{cases} f_n : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \\ \quad \hookrightarrow \text{ολοκληρώσιμες}, \ \forall n\in\mathbb{N} \\ f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \ \text{ολοκληρώσιμη} \end{cases}$$

(2)

<u>Ερώτηση:</u>

$$f_n \xrightarrow{\kappa\sigma} f \overset{;}{\Longrightarrow} \int_\alpha^b f_n \longrightarrow \int_\alpha^b f$$

<u>Απάντηση:</u> $\boxed{\text{Όχι}}$



$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \le x \le 1/2n \\ -2nx+2, & \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

Θέτουμε $g_n(x) = \dfrac{f_n(x)}{\int_0^1 f_n} \Rightarrow \int_0^1 g_n = 1 \ , \forall n\in\mathbb{N}$

Ισχυρισμός: $g_n \xrightarrow{\kappa\sigma} 0$

Για $x=0$: $g_n(x) = 0 \overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\Longrightarrow} g_n(0) \longrightarrow 0$

Για $0<x\le 1$: $\exists n_0\in\mathbb{N}$ τω $\frac{1}{n_0} < x \Rightarrow \forall n \ge n_0 , \ \frac{1}{n} < x \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall n\ge n_0 , \ g_n(x) = 0 \Rightarrow g_n(x) \longrightarrow 0.$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} 0$

Όμως $\int_0^1 g_n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \ne 0.$

Θεωρημα

Εστω $\{f_n\}$ ακολουθια ολοκληρωσιμων πραγματικών συναρτησεων $[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, τω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$, όπου $f\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ ολοκληρωσιμη.

Τοτε $\displaystyle\int_\alpha^\beta f_n \longrightarrow \int_\alpha^\beta f$.

Αποδειξη:

$$\left|\int_\alpha^\beta f_n-\int_\alpha^\beta f\right| = \left|\int_\alpha^\beta (f_n-f)\right| =$$

$$= \left|\int_\alpha^\beta (f_n(x)-f(x))\,dx\right|$$

$$\leq \int_\alpha^\beta |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \sup_{x\in[\alpha,\beta]} |f_n(x)-f(x)|\,dx$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \underbrace{\|f_n-f\|_\infty}_{\text{ενας αριθμός}}\,dx = (\beta-\alpha)\,\|f_n-f\|_\infty \longrightarrow 0$$

Ερώτηση : $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f \overset{;}{\Longrightarrow} f_n' \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f_n'$

με $f_n\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες $\forall n \in \mathbb{N}$
και $f\ [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

Απάντηση : $\boxed{\text{Όχι}}$

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}, \quad x \in [0,1]$$

$$\|f_n - 0\|_\infty = \frac{\sup |\sin(nx)|}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies$$

$$\implies f_n \xrightarrow{\text{ομ}} 0 = f$$

$$\left.\begin{aligned} f_n'(x) &= \frac{n\sin(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cdot\cos(nx) \\ \text{Για } x=0:\ f_n'(0) &= \sqrt{n} \longrightarrow \infty \neq 0 \end{aligned}\right\} \implies f_n' \not\xrightarrow{\text{κσ}} f' = 0$$

Ερώτ. $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ παρ/μες, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παρ/μη
$f_n \xrightarrow{ομ} f \Rightarrow f_n' \xrightarrow{ομ} f'$

Απ. ΟΧΙ. Αλλά, αν $f_n' \xrightarrow{ομ} f' \Rightarrow f_n \xrightarrow{ομ} f$

Π.χ. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x\in[0,1]$

$\|f_n-0\|_\infty = \frac{\sup_{x\in[0,1]} \sin(nx)}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{ομ} 0 = f$

$f_n' = \frac{n\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos(nx)$ (παραγωγίζουμε ως προς x)

Για $x=0$ $f_n'(0)=\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \neq 0 \Rightarrow f_n' \not\xrightarrow{κσ} f'=0$

συνεχώς → οι παράγωγοι f_n' είναι συνεχείς

Θ. Έστω $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ακολ. συνεχώς παρ/μων συναρτ., τω $\exists g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f_n' \xrightarrow{ομ} g$ (συνεχής γιατί η ομ. σ.)
Αν $\exists x_0\in[a,b]$ τω η $\{f_n(x_0)\}$ να συγκλίνει, τότε
$\exists f:[a,b]\to\mathbb{R}$ αντιπαράγωγος της g, τω $f_n \xrightarrow{ομ} f$

Σχόλ. Η παραπάνω υπόθεση ότι $\exists x_0\in[a,b]$ τω η $\{f_n(x_0)\}$ να συγκλίνει είναι απαραίτητη γιατί μπορεί η f_n' να συγκλίνει αλλά η f_n να μην συγκλίνει

Π.χ. $f_n(x)=n$, $g(x)=0$

$f_n'(x)=0 \xrightarrow{ομ} g$ αλλά $f_n(x) \not\to$ πουθενά

Ανάλ

Θέτω $c = \lim f_n(x_0) \in \mathbb{R}$

$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \quad x \in [a,b]$ [illegible]

$\int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b],\ f_n(x) \to \boxed{c + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt}$ [illegible] $= f(x)$

Αρκεί [illegible] $f_n \to f$

- $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \left| f_n(x) - c - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \right|$

$= \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + f_n(x_0) - c \right|$

$\leq \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} [f_n'(t) - g(t)]\,dt \right| + |f_n(x_0) - c|$

[illegible]

$\leq \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,dt \right| + |f_n(x_0) - c|$

$\leq \sup \left| \int_{x_0}^{x} \|f_n' - g\|_\infty\,dt \right| + |f_n(x_0) - c|$

$= \|f_n' - g\|_\infty \sup_{x \in [a,b]} |x - x_0| + |f_n(x_0) - c|$

$\leq \|f_n' - g\|_\infty (b - a) + |f_n(x_0) - c| \to 0 \cdot (b-a) + 0 = 0$

Ορ. Έστω (X,d) μ.χ., $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $S_n = s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ (σειρά των)
(το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$)

Αν $\exists f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $S_n \xrightarrow{κ.σ.} f$, η f λέγεται το κατά σημείο άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (γράφε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow{κ.σ.} f$)

Αν $\exists f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $S_n \xrightarrow{ομ.} f$, η f λέγεται το ομοιόμορφο άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (γράφε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow{ομ.} f$)

Παρατ. Η σύγκλιση σε κάθε σημείο [illegible] εξαρτώνται
πρέπει να προσδιορίσουμε τη σύγκλιση (κατά σημείο, ομοιόμ. κτλ)

Θ (Κριτήριο ομοιόμ. σύγκλισης του Weierstrass)
Έστω $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n \geq 0$, τ.ω.
$|f_n(x)| \leq M_n$, $\forall x \in X$. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλ. ομοιόμ.

Απόδ.
Αρκεί ν.δ.ο. η $\{S_n\}$ είναι ομ. Cauchy
Έστω $\varepsilon > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$: $\|S_n - S_m\|_\infty = \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k - \sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_\infty =$

$$= \left\|\sum_{k=m+1}^{n} f_k\right\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{m} \|f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k$$

Η $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει $\Rightarrow$ Η ουρά της πάει στο 0, δηλ. $\lim_{m \to \infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} M_k = 0$

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m \geq n_0$, $\sum_{k=m+1}^{\infty} M_k < \varepsilon \Rightarrow \|S_n - S_m\|_\infty < \varepsilon$, $\forall n > m$

$\Rightarrow \{S_n\}$ ομ. Cauchy $\Rightarrow \{S_n\}$ συγκλίνει ομοιόμ. $\boxed{\Rightarrow \sum f_k \text{ συγκ. ομ.}}$

Υπεν. Ορ. Δυναμοσειρά με κέντρο το 0: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($a_n \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

η ακτίνα σύγκλισης

Θ Έστω $R = \sup\{|x| : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει$\} \in [0, +\infty]$ [illegible] $R=0$ [illegible]

Αν $R>0$, τότε $\exists\, s : (-R,R) \to \mathbb{R}$ ώστε [illegible]

(i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην s σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$ όπου $[\alpha,\beta] \subseteq (-R,R)$

(ii) Αν $[\alpha,\beta] \subseteq (-R,R)$, τότε $s'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)'$ στο $[\alpha,\beta]$

(iii) Αν $[\alpha,\beta] \subseteq (-R,R)$, τότε $\int_\alpha^\beta s(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_\alpha^\beta x^k\,dx$

Πόρισμα: Η νέα δυναμοσειρά [illegible] $\sum_{k=0}^{\infty}$ [illegible] που προκύπτει από παραγώγιση ή ολοκλήρωση [illegible] έχει την ίδια ακτίνα

Απόδ.

(i) Δεδομένο

(iii) $s_n \xrightarrow{\text{ομ.}} s$ στο $[\alpha,\beta]$ → $\int_\alpha^\beta s_n \longrightarrow \int_\alpha^\beta s$

$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_\alpha^\beta x^k dx$

$\xRightarrow{\text{άρα}} \sum_{k=0}^{\infty} a_n \int_\alpha^\beta x^k\,dx = \int_\alpha^\beta s$

(ii) Αρκεί να δείξω ότι [illegible] $= t(x)$ στο $[\alpha,\beta]$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x^k)' = t(x)$

$s_n = \sum a_k x^k$

$s_n' \xrightarrow{\text{ομ.}} t(x)$

→ $s_n \xrightarrow{\text{ομ.}}$ στην παράγωγο της $t(x)$

$- s_n \xrightarrow{\text{σημ.}} s$

$\Rightarrow s' = t$